物质是如何形变的——流体和固体

作者：**达尔夫·费利克斯**（DARVE Félix），格勒诺布尔理工学院、固体土壤危险结构（3SR）实验室与格勒诺布尔阿尔卑斯山联合大学（UGA）名誉教授。

玻璃杯里的冰块是易碎的弹性固体，而夏慕尼冰海的流动则更接近粘性流体。事实上，在机械应力或热应力的作用下，任何材料都可以在固体和流体之间相互转化。但是，我们如何描述物质的这两种物态以及弹性、粘性、塑性等力学特性呢？为什么我们用应力和应变来描述材料的内部变化？应力和应变之间的关系是怎样的？为什么对材料结构的计算需要依赖于这种关系？本文将主要讨论以上问题。

1. 固体和流体

在经典的理论中，物质有**三种物态**（*Three States of Matter*）：气态、液态和固态。但也存在其他更复杂的状态，比如非牛顿流体、胶体和等离子体，这些复杂物态不在本文的讨论范畴内。气体和液体在力学特性上相近，可以将它们统称为**流体**（*Fluid*）。但是它们也存在不同之处。在封闭环境中，气体是可压缩的，它会占据整个封闭空间。在不考虑化学反应的情况下，人们只需要用温度、压强和体积之间的状态关系就可以对气体进行较为准确的描述（参阅压强、温度和热量）。而液体随着压强的变化，它们的体积只会成比例地发生微小的变化，尽管

具有一定的弹性，但几乎是不可压缩的。在容器中，液体会适应容器的形状，并只占据容器的一部分空间。

图 1. 金属块能保持自己的形状，因此它是固体；水会变成盛它的容器的形状，因此它是流体。

此外，我们还注意到，流体是流动的，即流体不能承受施加给它的非各向同性作用力（在空间中所有方向都相同即各向同性）而产生流动。在这一点上，各种**固体**（*Solid*）材料的主要区别就在于它们能够承受这种不同方向上所施加的不同作用力，直至超过某一极限，固体材料无法承受而发生破坏。因此，固体保持固定的形状，而流体则变成盛装它的容器的形状（如图 1）。

一般来说，对于任何材料，最简单的行为是微小形变，在这种形变中，内部能量耗散形成的热量是可以忽略不计的。在这种情况下，当所施加的力被移除时，对应的形变消除，材料会回到初始的形状。这种力学行为被称为**可逆**（*Reversible*）的，材料的这种属性被称为弹性。否则，被称为非弹性。

我们刚刚看到了材料的一般特性之一，可以在没有能量损失（弹性介质）的情况下发生形变，或是在有能量耗散（非弹性介质）的情况下发生，例如流动（流体）或者断裂（固体）。这些不同的行为构成了材料的**“流变学”**（*rheology*）*[1]*。如果我们想要实现对飞机、汽车、机械或是道路、桥梁、水坝、堤坝等物体结构及其变化的计算，就必须先定义材料属性相关的概念（第 2 节），然后理清它们之间的关系（第 4 节）。但是这又需要先对力和位移的概念进行推广，这将是第 3 节的主要内容。最后，第 5 节概述了结构力学的现代数值计算方法，并解释了对于工程师或地质学家来说，选择适用于计算的材料行为规律是非常重要的。

2. 弹性、粘性和塑性

我们的日常经验表明，这些基本的力学行为不足以描述天然或是人造材料所遭遇极端的作用力变化。因此，当两机械结构间发生相对错动时，其间就会存在强的非各向同性作用力（这里指强摩擦力），添加润滑油是不错的选择，润滑可以降低这种非各向同性作用力。润滑油是具有粘性的，作为一阶近似，可以假设它对非各向同性作用力的抵抗能力是与两机械结构间相对错动速度成正比的，流体这种特性被称为**牛顿粘度**（*Newtonian viscosity*）。我们平时用的水本身也是有粘性的，尽管只有润滑油的约千分之一，但这足以解释船航行时感受到的阻力，当船的航速增加时，确实感受到了更大的阻力。即使是气体，例如空气，也有水的约 1/50 的粘度，而且这个粘度是有用的，例如它可以通过减缓构成云的雨滴下落的速度来让云存在得更久[2]。（详见运动物体受到的阻力）。

图 2. 冰川就像山谷形的粘性流体一样流动。这张照片展示的是夏慕尼小镇的冰海。

固体也可以表现出粘性行为，例如，它们随着时间的推移而变形的现象被称为**蠕变**（*Creep*）。悬着重物的铅丝会因蠕变而随时间推移逐渐被拉长。更一般地说，温度的改变或是时间尺度的变化可以让流体和固体的相互转化。因此，冰块在从大的冰山上流下的时候，就会表现出固体的**弹塑性**（*Elastic-Fragile*）。它确实是固体，因为冰有自己的形状，如果施加较小的压力会导致其发生微小形变，当压力消失时，冰的形变会消失，此时它的行为是弹性的、可逆的。但是，在猛烈的冲击下，它则会表现出脆性而发生断裂。但如果以年为单位，长时间的作用力下，冰还可以表现得像一种**粘性流体**（*Viscous Fluid*）。例如，夏慕尼冰海（如

图 2）就以大约 100 米/年的速度沿着蜿蜒的山谷流动，我们可以推算出它的粘度是水的 10^{16} 倍。

冰块和固体通常都可以被打碎。它明显的断裂成几块的过程，在技术上被称为**脆性断裂**（*Brittle Fracture*），用冰锥凿冰或用锤子敲碎玻璃的过程就是脆性断裂。但是，还有另一种形式的断裂，不会让材料从一块变成多块：即所谓的**韧性断裂**（*Ductile Rupture*），它是**塑性力学**（*Plasticity*）中的概念。这种塑性变形主要对应于构成材料的各部分不可逆的相对位移，例如岩石、砂粒、粘土颗粒、粉末颗粒和粉状材料、金属晶体、冰晶……

根据库仑摩擦定律（它可以用来解释固体的摩擦力，详见 What is the Coulomb friction law?），**韧性**断裂发生于材料内部，涉及到内部摩擦力，是**瞬态**（*Instantaneous*）过程且和速度无关。但需要知道的是，如果固体的变形是粘性的，这些内应力会随着形变率而增加。因此，上文中的铅丝在负重较小时会在短时间内发生弹性延伸（可逆），在负重超过所谓的**失效准则**（*Failure Criterion*）时发生塑性延伸（不可逆），而长时间承受较轻负荷时，则发生与时间成正比的蠕变。铁在高温时更容易发生塑性变形，因而具有**韧性**（*Ductile*）。铁匠们正是因为对这一现象非常熟悉，才能在不把金属敲碎的情况下改变金属的形状。温度越高，金属的流动性越好，而到了熔点，它就会改变物态，变成粘度和水接近的液体。

图 3. 对于特定的物质，比如沙滩上的沙子，在行走的人脚下就像是具有弹性和塑性的固体，当它流入沙漏时就像是有摩擦的流体。根据施加在材料上力的大小不同，其性能通常可以覆盖整个弹-粘-塑性范围。

简而言之，**塑性**（*Plastic*）形变是**瞬时**（*Instantaneous*）的，而**粘性**（*Viscous*）形变是有**延迟**（*Delayed*）的（随时间推移）。沙滩上的脚印既是瞬时的，也是永

久不可逆的，因此沙子的行为在这里可以被描述为“塑性”。在泥泞地面上踩下一只脚的过程对地面来说是不可逆转的，但过程也会随着脚作用在地面时间增长而变化（如果你踩在原地的时间足够长的话），此时粘土的行为是粘性的。至于完全可逆变形，它在荷载消失时就会消失，我们已经提到，这种现象可以用**弹性**（*Elasticity*）力学来解释。简而言之，可逆的形变为弹性形变；不可逆形变在形变量与时间相关时表现为粘性；与时间无关时，则表现为塑性。

如今，很多人都相信没有真正意义上的固体材料，而是对每种特定的材料来说，都具有表现为固体以及表现为流体的行为，它们的一般可以用**弹-粘-塑性**（*Elasto-Visco-Plastic*）模型来描述。为说明这一点，我们以沙子为例：我们踩在沙滩上时，沙子表现出弹性和塑性，而当沙子在沙漏中流动时，则表现出流体的特性。

3. 应力与形变

如果将某物体近似成一个质点，则根据动力学原理，它的运动可以用一个位移矢量和一个力矢量来描述（参阅动力学定律）。根据这些定律，所施加给物体的力等于物体质量与加速度的乘积。此外，作为首次近似，流体（气体或液体）的属性可以由压强和体积（如果不考虑热学因素）来表征，其关系受到状态方程的约束。

现在让我们考虑一个**可形变固体**（*Deformable Solid*），看看为什么先前的“力-位移”或“压强-体积”的概念不再适用，而必须加以推广。让我们以一个装满沙子的桶为例，如果我们对沙子的上表面施加垂直向下的压强，经验表明桶的侧壁承受的压强会增大，大约是施加的压强一半多一点，而桶的底部压强增大值会略小于施加的压强。如果桶里装满了水，那么桶的侧壁和底部都会感受到同样大小的压强增量，因为水是各向同性的，而沙子不是。所以必须构想出新的数学模型来描述这种**可形变固体内部的压强**分布（*Pressure in a Deformable Solid*），这种压强在固体内的不同方向上是不同的，或更准确地说，在不同方向的面元上压强是不同的，可以分别单独地考虑每个面元附近的固体和作用在面元上的力。由于矢量的特性无法描述单位面积上力的方向变化，所以我们需要引入二阶**张量**（*Tensor*）来描述这种变化[3]，下面你将看到如何构建它。

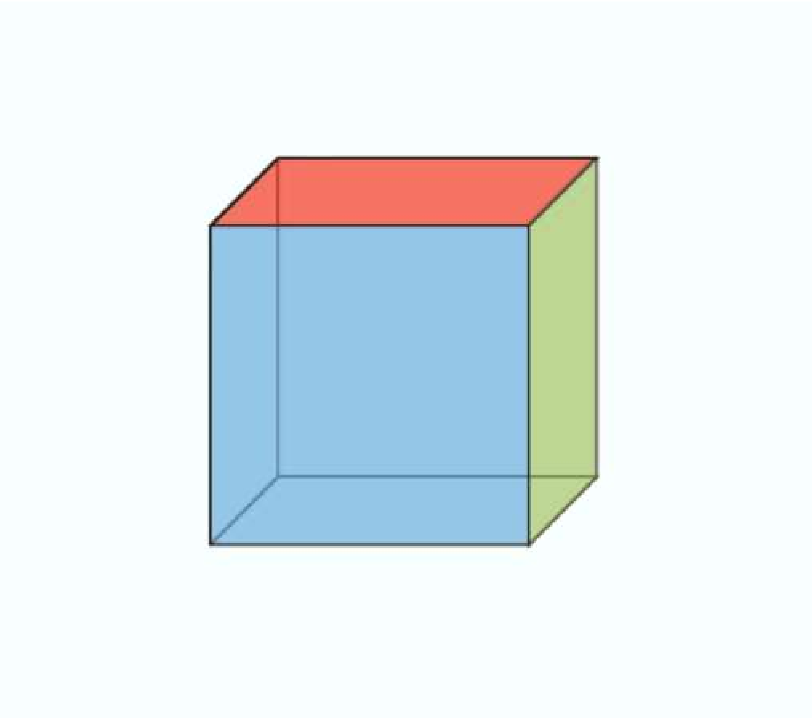

图 4. 一个无限小的立方体积元，6 个面受到来自任何方向、任意力密度（单位面积上力的大小）的力。注意，对于立方体的整体平衡而言，所施加的力以及力矩总和为零。这个立方体上力的分布可以通过一个约束矩阵来描述，如文中所定义的那样。在力的作用下，立方体发生形变成为一个普通的六面体，由两两一组相互平行的平行四边形构成，是斜平行六面体。这种变化由单纯的形变量来描述（它的矩阵将会在文中定义），而立方体的整体旋转则由旋转矩阵给出。[来源：© Encyclopedia of the Environment]

在图 4 中，立方体的每个面上都被施加了一组力，这些力不一定要垂直于该面。因此，压强的概念（在静态流体的情况下压强总是垂直于表面）必须推广到**倾斜于表面的单位面积作用力**（*Oblique Forces with Respect to the Surface*）。一个人可以在地面上行走而不打滑的事实表明，人可以有效地向固体表面施加一个切向力，而固体则可以给人施加切向力的反作用力。根据作用和反作用力的原理，图 4 中立方体受到的六个力在每两个相对的面上是等效的。因此，我们实际上只需要三个独立的力向量。每个面元上的力有三个分量，或叫做**应力矢量**（*Stress Vector*），使构造一个 3×3 的方阵成为可能：这就是应力张量矩阵。它让我们能够计算施加在材料内部任何方向、任何面元上的表面力。

因此在沙桶这个例子中，桶内的垂直向下的应力等于：

$$\sigma_v = \frac{F}{S}$$

其中 F 为所施加的铅锤作用力，S 为桶水平截面的面积。施加在桶侧面的水平应

力或称作径向应力可近似等于：

$$\sigma_h = \frac{\sigma_v}{2} = \frac{F}{2S}$$

这两个约束被称为*主要（Main）*约束，因为它们分别垂直于水平面和侧壁面。

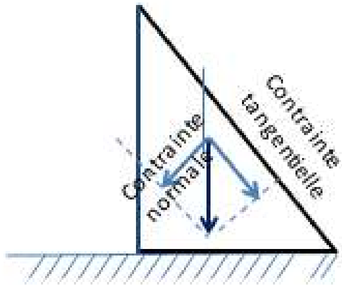

图 5. 一块有重量的三角形材料，在平行于其斜面的一个面元上施加一个垂直向下的外力，可以分解为平行于面元的“切向力”和垂直于面元的“法向力”。[来源：© Joël Sommeria]（Contrainte tangentielle 切应力，Contrainte normale 法应力）

对于任意一个方向的面元，其受到的约束力可以不垂直于它。对这个约束力按照沿面元表面和垂直于面元的方向进行分解，沿面元的分力被称为**切应力**（*Shear Stress*），垂直于面元的分力被称为**法应力**（*Normal Stress*）。（见图 5）

现在让我们回到质点的位移和物体体积形变的概念上来，我们必须对它们也加以概括。事实上，在沙桶上进行的实验表明，在沙子的上表面用手施加一个垂直向下的压力，会使沙子的上表面下沉，而桶的侧壁限制了沙子在侧向的位移。这种情况下，沙子在上表面和桶壁上表现出在各个方向的位移不再是一致的，相反，它们随方向的不同而不同。

如果我们把每一小块沙子近似成一个质点，我们将会得到所谓的**位移场**（*Displacement Field*），它具体地描述了所有砂粒在桶中的位移。我们可以看到，在铅垂方向上，上表面附近的沙粒会有明显的位移，而在桶底的沙粒则没有位移，它们的移动幅度会随着深度线性变化。然而，每一个小立方体，受到相同的铅垂压力，以相同的方式在铅垂方向上发生形变。因此，我们必须从“位移”的概念转向更为本质的**“形变”**（*Deformation*）概念。这种转变是通过[4]梯度操作来实现的，它将铅垂方向的位移转化为无量纲的量，称为“铅垂形变”，在桶内的任何一点上都相同，它等于沙粒的铅垂位移量与该沙粒在桶中的高度之比。

但我们需要推广这个沙桶实验，因为沙子上表面受到的铅垂压力可能导致桶壁本身变形，如果是这样会发生什么呢？这样一来，沙粒的运动就不再是铅垂的，而是倾斜的。通过提取该位移场（三维向量）的梯度，我们会得到一个完全描述变形桶内沙子形变的 3×3 **形变矩阵**（*Deformation Matrix*）。

这个 3×3 方阵可以被分解为两个矩阵之和：其中一个描述立方体材料在力的作用下的旋转，另一个描述不包括旋转成分的、真正意义上的形变，被称为**纯形变**（*Pure Deformation*）。（如图 4 所描述）

以一个刚性的沙桶为例，其铅垂形变为：

$$\varepsilon_v = \frac{\delta H}{H}$$

其中 H 为沙桶的高度；水平形变或者称作径向形变等于：

$$\varepsilon_h = \frac{\delta D}{D}$$

其中 D 为沙桶的直径。这些形变被称为**主形变**（*Main Deformation*），因为它们垂直于各自对应的沙桶底面和侧面。

总体来说，不管体积元受到的是何种力，纯形变存在两种基本的形变模式：材料的**伸缩**以及**扭转**。

长度和角度这两个概念最早由埃及人定义，这使得他们在尼罗河洪水过后，能够恢复被尼罗河泥沙所覆盖的土地。即使在今天，我们仍然用这两个概念来表示物体的形变，而且纯形变在可发生形变物体的任何一点上，都可以准确地为我们提供这两个形变量。

4. 本构关系

每一块材料在给定作用力下发生确定的形变，我们把这称作材料的**力学行为**（*mechanical behaviour*），力和形变的关系可以用称作“本构关系”的数学公式来表达。一般来说，材料中任意点在任意时刻的应力可以写成与该点纯形变整个历史有关的函数。如果只考虑材料的弹性，则应力随着应变的变化是一个简单的函数，且与此前发生过的形变无关。

如果这个函数是线性的，那么**弹性**（*Elasticity*）就被称为是**线性的**（*Linear*），这样应力和形变量就成正比了：在这种情况下，应力矩阵就等于**弹性张量**（*Elastic Tensor*）乘以形变矩阵。在通常情况下，各向同性（行为在空间的所有方向上都相同）的弹性材料的弹性张量只由两个参数来决定：杨氏模量（表征了材料的硬度）和泊松比（表征材料在轴向压力下发生侧向形变的能力）。

牛顿粘滞定律（*Newtonian Viscosity*），作为最简单的粘性定律，给出了应力和**纯形变速率**（*Deformation Rate*）之间的正比例关系。这种关系描述了材料强度随作用于材料的外力增长速率而变化的规律。

图 6. 沙丘的坡度大致相当于沙子的摩擦角。这个角度会随沙粒的密度和形状而或多或少地变化。一般来说，这个角接近 30 度。

最后，考虑**弹塑性**（*Elasto-Plasticity*）时，应力和应变的关系就不再像在纯弹性时那样简单了，因此我们更喜欢使用所谓的**增量**（*Incremental*）形式的表达式，将应力增量与应变增量联系起来。这样一个弹塑性张量就构建出来了，它是应力增量与应变增量之比。最符合弹塑性特性的材料是沙子。因此，一个沙堆或一个处于平衡态的沙丘会有一个固定的**坡度**（*Slope*）（如图 6），坡度的角度（30°左右）能够反映沙堆内部沙粒之间的塑性摩擦。另一方面，如果是缺乏塑性的粘性液体则会随着时间的推移而逐渐延展变形。沙子的塑性使沙堆的斜面维持稳定。

但如果在坡上添加少量沙子，则会马上发生**局部雪崩效应**（*Local Valanche*），说明这里的沙子正处于第 2 节中失效准则所描述的 塑性状态“极限”：沙坡的角度是不能超过这个极限角的。

塑性的一个有趣的特性是**应变硬化现象**（*Phenomenon of Strain Hardening*），它启发我们可以通过塑性形变来提高材料机械强度。道路的铺设就是一个典型的例子。刚从卡车倾倒出来的沙子非常松散，其内部的阻力非常小以至于手指都可以插进去。但是，一旦被压路机压实，沙层就会有很强的抵抗力，汽车可以在这层沙子上行驶而不会陷下去。然而，如果沙粒之间没有胶水，行驶的车辆将很难刹车，因为轮胎在沙子上滑动时，沙粒间不能提供足够的摩擦力。沥青就起到了胶水的作用，它保证了沙子或沙砾混合物的内聚力。但另一方面，这种内聚力导致了裂缝出现的可能性，从而降低了路面的质量。

我们知道，**金属结构的计算**（*Calculation of a Metal Structure*）、土木工程结构的**规模估计**（*Sizing*），**复杂流体流动**（*Flow of a Complex Fluid*）状态的预测或者更普遍地，任意力学系统的行为预测都是非常困难的，因为材料的“弹-粘-塑”特性过于复杂，很难通过实验准确测定或者定量描述。那我们又该如何准确计算一个系统在变化的外力作用下的力学行为（这本质上是一种预测）呢？

5. 可变形材料的力学问题求解

无论是考虑流体还是固体，为了计算和预测一种结构的力学行为，工程师必须写出并求解三组性质截然不同的数学方程：

- **守恒律**（*Conservation Laws*）（质量、能量、动量等），适用于任何材料和所求解的问题。这些定律在很久以前就被发现并证实，并一直在使用。

- **本构关系**（*Laws of Behaviour*），本文中已经阐述过的一些材料的应力和应变关系。这些本构关系（最普遍的是“弹-粘-塑”性）至今仍然是十分热门的研究课题，现在人们已经关注到了材料微观结构（甚至当我们研究纳米材料时还会与纳米结构相结合）。

- **初始条件和边界条件**（*Initial and Boundary Conditions*），是系统、机械结构、流体等物理模型计算所必须的。初始条件表征了系统的初始状态（在计算开始时）。边界条件决定了模型的形状和所受到的随时间变化的力。目前商业化的计算软件已经能够将各种情况考虑在内。

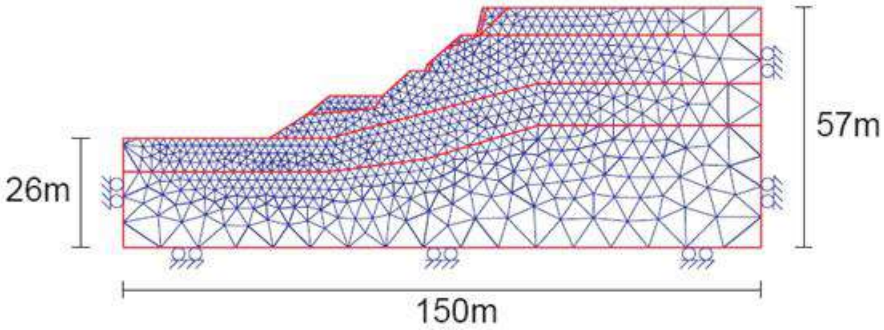

图 7. 使用有限元法对特莱武（Trévoux，法国东部安省的一个市镇）的滑坡进行建模。不同土层用红线分开，土壤被划分为无数网格。模型还考虑了挡土墙（在图的中上部可以看到）和路堤。每一个网格都考虑了水-力耦合以及弹塑性行为规律。为了方便数值解析，数据的加载是一步一步进行的，它本质上是对一系列矩阵求逆（矩阵规模可能非常大——这里大约有 5000 个未知数对应 5000 个方程）。[来源：© Doctoral thesis by H.D.V. Khoa, INP Grenoble]

有时会同时存在多个相（例如土壤、空气和水，或岩石、石油和天然气），我们称之为**多相**（*Multi-Phase*）环境。在这种情况下，这会引出“耦合”的难题。这些问题被称为**多场耦合**（*Multi-physical*）问题（例如，如果考虑温度，会有力学和热学之间的耦合，或者一个系统不同成分之间发生化学反应时，力学与化学之间的耦合等）。

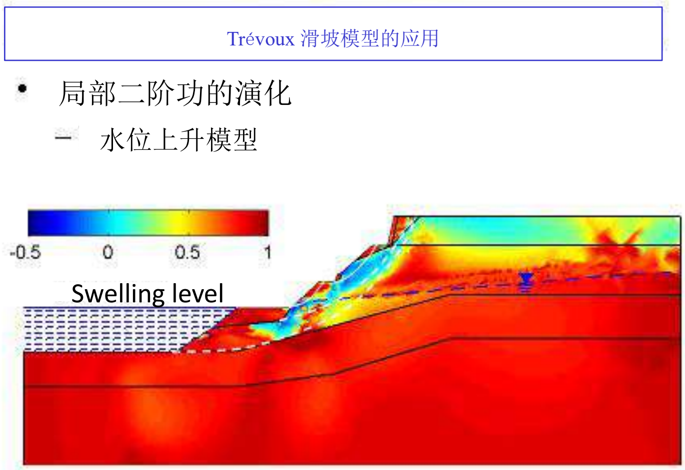

图 8. 我们可以看到，通过有限元法求解特莱武（Trévoux）滑坡模型的一个特解。蓝色区域是不稳定区域，在大雨期间可能会发生滑坡。计算模型可以改变地下水位（用土体内部深蓝色虚线表示）。在图的左边可以看到充满水的河（蓝色实线是水位）。我们看到挡土墙起到了固定土壤的作用，其背后红色的区域即为稳定域。然而，数值模拟显示了发生严重滑坡（蓝色）的可能性，它有可能冲垮挡土墙——事实上这在特莱武的确发生了。[来源：© Doctoral thesis by H.D.V. Khoa, INP Grenoble]

对于工程师来说，最麻烦的问题往往在于对本构关系的选择和实施，尽可能在所考虑的问题中选择有代表性的材料。**现代数值方法**（*Modern Numerical Method*）使得求解前面提到的三组方程成为可能。方程的数量可以达到几百万，需要使用超级计算机来完成计算。

虽然可以认为材料在发生形变的时候仍然保持其连续性，最常见的计算方法叫做**“有限元”**（*Finite Element*）方法（如图 7 和图 8）。这两张图展示了物理建模和数值计算结果，由此可明白为什么暴雨过后的特莱武发生了滑坡（参阅滑坡）。

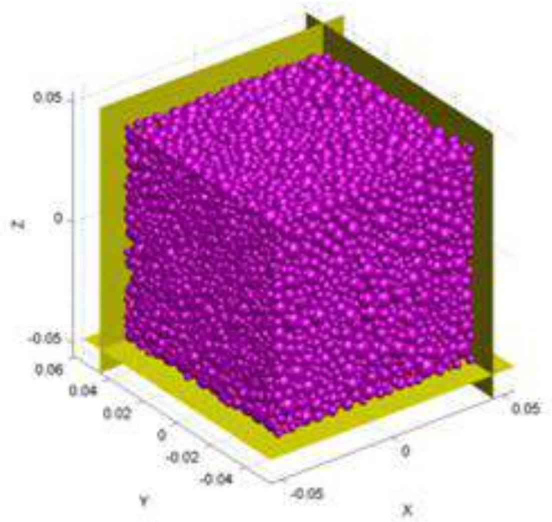

图 9. 用离散元法模拟颗粒状材料的立方体。这个由 10000 个相互接触的弹性球体组成的虚拟数字样本，使得观察、理解和分析沙子（不论是干的还是含有毛细水）的行为成为可能，特别是根据施加力的大小，观察它们不同的散落模式。[来源：© Doctoral thesis by L. Sibille, INP Grenoble]

今天，我们可以定量预测降雨量。也可以通过数值模拟来检验防范措施（挡土墙、堤坝、土体加固、排水等）的有效性。另一方面，如果材料内部存在固有的、无法简化的非连续单元（例如材料内部存在局部断裂的情况），就要采用另一种被称作**“离散元”**（*Discrete Elements*）的数值方法（如图 9）。然后，我们通过对上百万个离散单元的数值求解，就可获得每个体积元的位移和旋转。例如，混凝土块受到弹丸冲击作用下的碎裂就可以用这种数值方法模拟。这种方法还可以计算雪崩（雪、落石等）和泥石流等。（参阅岩体滑坡和崩塌，命中注定的吗？）

参考资料及说明

封面图片：米洛斜拉桥的结构复杂，人们需要对其建筑材料的力学行为进行深入研究。[来源：维基百科。公共属性许可证-Sharing of the identical initial conditions v.2.5 of Creative Commons，被普遍称作“CC-BY-SA-2.5; © Mike Lehmann, Mike Switzerland 10:38, 14 March 2008 (UTC)”。]

[1] 流变学是一门描述物质流动的学科，或者更普遍地，描述物质形变的学科。这个词来源于希腊语中的“ρεω”，意思是“流动”；“λοϒοσ”，意思是“演讲”。

[2] 对于交通工具和其他大型物体来说，移动时的阻力主要来自于湍流，而摩擦阻力相对很小。

[3] 张量是一个数学概念，它具有一系列的张量特性。这些特性让我们在不同的参考系下都能用它进行物理学描述。一阶张量就是一个矢量，它由一行或者一列数字组成；二阶张量是一个矩阵（数字排成的阵列）。应力和应变之间的关系就得用矩阵来表示。任何有限阶的张量都是可定义的。例如，弹性张量就是一个四阶张量。

[4] 一个标量函数的梯度是一个矢量场，它包含了空间坐标下这个函数的偏导。进一步推广，矢量的梯度是一个矩阵，它的列向量是由矢量的一个分量在空间里求偏导得到的。在经典的 3 维空间中，这个结果可以表示为一个 3 行 3 列的方阵。